

АЖМОЛДАЕВ ГАЗИЗ ФАЙЗУЛЛАЕВИЧ

«Об усреднении аттракторов уравнений реакции-диффузии в области с шероховатой границей»

Аннотация диссертации, представленной на соискание степени доктора философии (PhD) по образовательной программе 8D05401 – «Математика»

Актуальность исследования. Современное материаловедение и прикладные задачи физики, биологии и химии приводят к необходимости исследования процессов, происходящих в микронеоднородной среде (например, в каркасных структурах, пористых средах, композиционных материалах с наноструктурой и др.). Решение таких задач с помощью численных методов и вычислительных средств представляет большую трудность, так как они требуют исследования и решения систем алгебраических уравнений с миллиардами неизвестных. В таких случаях на помощь приходят методы асимптотического анализа и теории усреднения, которые позволяют записать значительно более простые по структуре задачи, но близкие к исходным по решению.

Аттракторы описывают поведение решений диссипативных нелинейных эволюционных уравнений на больших промежутках времени и характеризуют устойчивость или неустойчивость предельных структур соответствующих динамических систем. В данной работе исследуется асимптотическое поведение аттракторов системы уравнений реакции-диффузии с быстро осциллирующими членами как в самом уравнении, так и в граничных условиях, в областях с локально периодической и случайно осциллирующей границей. Доказано существование траекторных аттракторов, построены предельные (усреднённые) системы уравнений реакции-диффузии как в случае локально-периодической, так и в случае статистически однородной случайно осциллирующей границы.

В данной диссертационной работе устанавливается слабая сходимость («почти наверное» в стохастическом случае, то есть с вероятностью единица) траекторных аттракторов \mathcal{A}_ε систем уравнений реакции-диффузии в областях с осциллирующей границей к траекторным аттракторам $\bar{\mathcal{A}}$ усреднённых систем при $\varepsilon \rightarrow 0$. Здесь малый параметр ε характеризует период и амплитуду колебания границы. Параметр ε в некоторой степени также входит в третье краевое условие на части локально-периодической осциллирующей границы. В зависимости от соотношения между степенями малого параметра в пределе получаются три различные предельные задачи (критический, субкритический и суперкритический случаи). В случайной постановке задачи параметр ε также характеризует микронеоднородность на границе области.

Цель работы. Целью данной работы является исследование асимптотического поведения траекторных аттракторов начально-краевой задачи

для системы уравнений реакции-диффузии с быстро осциллирующими членами в области с осциллирующей границей при стремлении малого параметра, определяющего осцилляцию границы, к нулю.

Методы исследования. Для исследования поставленных задач используются методы асимптотического анализа и теории усреднения начально-краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными, кроме того, используется аппарат качественной теории нелинейных уравнений в частных производных и методы функционального анализа.

Научная новизна. В работе получены следующие новые научные результаты:

1. Описано предельное поведение траекторных аттракторов системы уравнений реакции-диффузии в зависимости от соотношения параметров β и $1 - \alpha$, являющихся степенями малого параметра при неизвестных функциях в третьем краевом условии на локально осциллирующей границе.

2. Описано предельное поведение траекторного аттрактора системы уравнений реакции-диффузии с третьим краевым условием на случайной осциллирующей границе.

Описание основных результатов исследования.

Во втором разделе диссертационной работы установлены условия сходимости траекторного аттрактора системы уравнений реакции-диффузии в области с быстро осциллирующей границей к траекторному аттрактору предельной (усреднённой) задачи в области с гладкой (плоской) границей. Показано, что в зависимости от характера осцилляций и параметров задачи, при стремлении малого параметра к нулю, третье краевое условие может переходить в одно из трёх различных краевых условий: третье краевое условие (условие Фурье) в критическом случае, второе краевое условие (условие Неймана) в субкритическом случае или первое краевое условие (условие Дирихле) в суперкритическом случае. Сформулированы и доказаны соответствующие теоремы о сходимости траекторных аттракторов.

В третьем разделе получены условия сходимости траекторного аттрактора для системы уравнений реакции-диффузии в области со случайной осциллирующей границей. Сформулирована теорема о сходимости траекторных аттракторов начально-краевой задачи к траекторному аттрактору соответствующей усреднённой (предельной) задачи.

Обоснование новизны и значимости полученных результатов.

Полученные в настоящей работе научные результаты являются новыми и носят теоретический характер. Они описывают долговременное (асимптотическое во времени) поведение решений системы уравнений реакции-диффузии в областях с локально-периодической и случайной осциллирующей границей. Полученные результаты также представляют интерес с точки зрения прикладной математики и могут быть использованы при численном

моделировании процессов переноса, таких как движения жидкости или газа в средах с быстро осциллирующими (шероховатыми) границами.

Кроме того, научные результаты данной работы могут быть использованы в образовательном процессе при подготовке научных кадров в магистратуре и докторантуре в рамках элективных курсов по дифференциальным уравнениям с частными производными, теории усреднения и качественной теории нелинейных уравнений.

Новые научные результаты, полученные в работе.

В данной работе получены следующие новые научные результаты:

1. Описано предельное поведение траекторных аттракторов системы уравнений реакции-диффузии в зависимости от соотношения параметров β и $1 - \alpha$, являющихся степенями малого параметра при неизвестных функциях в третьем краевом условии на локально осциллирующей границе.

2. Описано предельное поведение траекторного аттрактора системы уравнений реакции-диффузии с третьим краевым условием на случайной осциллирующей границе.

Публикации. Основные результаты диссертационной работы опубликованы в 11 работах (4 статьи и 7 тезисов докладов). Из них 4 статьи опубликованы в журналах, входящих в базы Web of Science и Scopus (3 статьи – в журналах с процентилем выше 35, 2 статьи – в зарубежных изданиях).

1. Homogenization of attractors to reaction-diffusion equations in domains with rapidly oscillating boundary: Critical case // Networks and Heterogeneous Media. – 2024. – Vol. 19, Iss. 3. – P. 1381–1401 (IF2024=1.3, Q3; CiteScore2024=1.9, процентиль 43).

2. Homogenization of attractors to reaction-diffusion equations in domains with rapidly oscillating boundary: Supercritical case // Ufa Mathematical Journal. – 2025. – Vol. 17, Iss. 2. – P. 91–104 (IF2024=0.4, Q4; CiteScore2024=1.2, процентиль 43).

3. Homogenization of attractors to reaction-diffusion equations in domains with rapidly oscillating boundary: Subcritical case // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics series. – 2025. – Vol. 118, Iss. 2. – P. 28–43 (IF2024=0.9, Q2; CiteScore2024=1.4, процентиль 53).

4. Homogenization of attractors to the reaction-diffusion system in a domain with rough boundary // Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science. – 2025. – Vol. 126, Iss. 2. – P. 3–24 (IF2024=0.3, Q4; CiteScore2025=0.4, процентиль 18).

Тезисы в материалах международных конференций.

1. Об усреднении аттракторов системы уравнений реакции-диффузии в области с шероховатой границей // XIX международная научная конференция студентов, магистрантов и молодых учёных «Ломоносов – 2024», Казахский филиал Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова (Астана, 2024. – С. 12-13).

2. Об усреднении аттракторов системы уравнений реакции-диффузии в области с шероховатой границей // Материалы международной научно-

практической конференции, посвященной 270-летию Московского университета, Казахстанский филиал Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова (Астана, 2024. – С. 41-48).

3. Об усреднении аттракторов системы уравнений реакции-диффузии в области с шероховатой границей // Актуальная проблема анализа, дифференциальных уравнений и алгебры (EMJ-2025). Сборник тезисов международной конференции, посвященной 15-летию выпуска журнала «Eurasian Mathematical Journal», Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумелёва (Астана, 2025. – С. 76-77.)

4. Об усреднении аттракторов системы уравнений реакции-диффузии в области со случайной осциллирующей границей // XX международная научная конференция студентов, магистрантов и молодых учёных «Ломоносов – 2025», Казахстанский филиал Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова (Астана, 2025. – С. 12-15).

5. Об усреднении аттракторов системы уравнений реакции-диффузии в области с шероховатой границей // Республиканская научная конференция посвященная 80-летию со дня рождения академика Ш.А. Алимова, Национальный университета Узбекистана имени Мирзо Улугбека (Ташкент, 2025. – С. 179-180).

6. Homogenization of trajectory attractors of random reaction-diffusion systems in domains with rapidly oscillating boundary // Международная конференция, посвящённая выдающему математику И.Г. Петровскому, Московский государственный университет (Москва, 2025. – С. 12-13).

7. Homogenization of trajectory attractors of random reaction-diffusion systems in domains with rapidly oscillating boundary // 15th ISAAC Congress, Nazarbayev university (Astana, 2025. – P. 167).

Апробация полученных результатов.

Основные результаты диссертационной работы были представлены на следующих конференциях:

1. Об усреднении аттракторов системы уравнений реакции-диффузии в области с шероховатой границей // Международная научная конференция «Математика в созвездии наук», посвящённая 85-летию со дня рождения академика РАН В.А. Садовничего, Казахстанский филиал Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова (Астана, 1-2 апреля 2024 года)

2. Об усреднении аттракторов системы уравнений реакции-диффузии в области с шероховатой границей // XIX международная научная конференция студентов, магистрантов и молодых учёных «Ломоносов – 2024», посвящённая 270-летию Московского университета, Казахстанский филиал Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова (Астана, 19-20 апреля 2024 года)

3. Об усреднении аттракторов системы уравнений реакции-диффузии в области с шероховатой границей // Международная научно-практическая конференция, посвященная 270-летию Московского университета «Фундаментальная наука и приоритеты XXI века», Казахстанский филиал Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова (Астана, 29 ноября 2024 года)

4. Об усреднении аттракторов системы уравнений реакции-диффузии в области с шероховатой границей // «Актуальная проблема анализа, дифференциальных уравнений и алгебры» (EMJ-2025). Международная конференция, посвященная 15-летию выпуска журнала «Eurasian Mathematical Journal», Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумелёва (Астана, 7-11 января 2025 года)

5. Об усреднении аттракторов системы уравнений реакции-диффузии в области со случайной осциллирующей границей // XX международная научная конференция студентов, магистрантов и молодых учёных «Ломоносов – 2025», Казахстанский филиал Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова (Астана, 11-12 апреля 2025 года)

6. Об усреднении аттракторов системы уравнений реакции-диффузии в области с шероховатой границей // Республиканская научная конференция «Современные методы математической физики и их приложения», посвященная 80-летию со дня рождения академика Ш.А. Алимова, Национальный университета Узбекистана имени Мирзо Улугбека (Ташкент, 22-24 апреля 2025 года)

7. Homogenization of trajectory attractors of random reaction-diffusion systems in domains with rapidly oscillating boundary // Международная конференция «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы», посвящённая выдающему математику И.Г. Петровскому, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова (Москва, 19-23 мая 2025 года)

8. Homogenization of trajectory attractors of random reaction-diffusion systems in domains with rapidly oscillating boundary // 15th ISAAC Congress, Nazarbayev university (Astana, 21-25 июля 2025 года)

Кроме того, результаты работы были обсуждены на следующих научных семинарах:

1. Научный семинар по уравнениям математической физики механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова. Руководитель: Г.А. Чечкин (Москва, 18 сентября 2024 года).

2. Научный семинар «Функциональный анализ и его приложения». Руководители: академик НАН РК М. Отелбаев, академик НАН РК Р.О. Ойнаров, профессора Е.Д. Нурсултанов и К.Н. Оспанов (Астана, 13 марта 2025 года; 5 июня 2025 года).

3. Научный семинар кафедры «Фундаментальная математика» Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумелёва (Астана, 25 сентября 2025 года).

Вклад докторанта в подготовку каждой публикации.

Основные результаты диссертационной работы были опубликованы в 4 научных статьях. Все статьи подготовлены в соавторстве. В этих работах постановка задач и выбор методологии исследования предложены научными консультантами, а докторант самостоятельно сформулировал основные и вспомогательные результаты, и привел их доказательства.

Структура и объем диссертации.

Диссертационная работа состоит из введения, основной части, состоящей из трёх разделов, заключения и списка использованных источников. Нумерация формул устроена следующим образом: первая цифра означает номер раздела, вторая – номер подраздела, третья – порядковый номер формулы в данном подразделе. Нумерация теорем, лемм, утверждений и замечаний также трёхуровневая и устроена по вышеотмеченной схеме. Общий объем работы составляет 100 страниц.

Основное содержание работы.

Во введении даются обоснования актуальности и новизны темы, сформулированы цели, объект, предмет и задачи исследования. Приведён список опубликованных работ по теме диссертации, а также перечень конференций и семинаров, на которых докладывались результаты исследования.

В первом разделе диссертации приведены основные понятия, связанные с траекторными аттракторами автономных эволюционных уравнений. А именно, здесь приведены определение траекторного аттрактора, схема его построения и соответствующие утверждения. Также в данной главе определяется вероятностная структура, описывающая случайную осцилляцию границы. Кроме того, формулируются и обосновываются условия, при которых возможно использование эргодической теоремы Биркгофа.

Во втором разделе рассматривается задача усреднения в микронеоднородной области с быстро осциллирующей границей. Предполагается, что в области задана система нелинейных уравнений реакции-диффузии с быстро осциллирующими членами и диссипацией. На локально периодической осциллирующей части границы выставлено третье краевое условие с быстро осциллирующими коэффициентами, зависящими от малого параметра, характеризующего осцилляцию границы. В зависимости от соотношения между степенями малого параметра в краевом условии получаются различные усреднённые (предельные) задачи (выделяются критический, субкритический и суперкритический случаи). Для каждого из случаев доказана теорема о сходимости траекторных аттракторов исходной системы уравнений реакции-диффузии к траекторным аттракторам усреднённой (предельной)

системы. Кроме того, в случае единственности решения системы также доказана сходимости глобальных аттракторов.

В третьем разделе рассматривается система уравнений реакции-диффузии в области со случайной быстро осциллирующей границей. В случае статистически однородной случайной структуры границы получена усреднённая система уравнений реакции-диффузии с детерминированными (неслучайными) коэффициентами. Также как и в предыдущем разделе была доказана теорема о сходимости траекторного и глобального аттракторов исходной задачи Коши к траекторным и глобальным аттракторам предельной задачи соответственно.